Résumé de Cours : **Limite d'une fonction**

PROF: ATMANI NAJIB

LIMITE D'UNE FONCTION

2BAC SM BIOF

Limite finie L en a finie :

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. la fonction f tend vers l quand x tend vers a et on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ssi :

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in Df)(0<|x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$

2)Si P est une fonction polynôme alors : $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

3)Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $g(x)\le f(x)\le h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

Limite à droite et limite a gauche

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a,\ a+r[$ où $r>0$ et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a à droite si la proposition suivante est vraie :$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in Df)(\ a<x<a+\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$

Et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a$ - r, a [où $r>0$ et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a à gauche si la proposition suivante est vraie : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in Df)(\ a-\alpha<x<a\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$

Et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$

3) Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l.

Autre limites infinies

1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ssi :

$(\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in Df)(0<x-a<\alpha\Rightarrow f(x)>A)$

2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$:

$(\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in Df)(0<x-a<\alpha\Rightarrow f(x)<-A)$

3) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$:

$(\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in Df)(0<a-x<\alpha\Rightarrow f(x)>A)$

4) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$:

$(\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in Df)(0<a-x<\alpha\Rightarrow f(x)<-A)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ ssi$(\forall\varepsilon>0)(\exists B>0)(\forall x\in Df)(x>B\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon)$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ ssi

$(\forall\varepsilon>0)(\exists B>0)(\forall x\in Df)(x<-B\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ssi

$(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in Df)(x>B\Rightarrow f(x)>A)$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ssi

$(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in Df)(x>B\Rightarrow f(x)<-A)$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ssi

$(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in Df)(x<-B\Rightarrow f(x)>A)$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ssi

$(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in Df)(x<-B\Rightarrow f(x)<-A)$

10)Si $\forall x\in I$:$|f(x)-l|\le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ (On peut citer les mêmes propriétés à gauche et a droites de a ou $+\infty$ ou $-\infty$.)

11)Si $\forall x\in I:|f(x)|\le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

12)Si f admet une limite en a et f positif sur un intervalle pointé de centre a alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ge 0$

13)Si f admet une limite en a et g admet une limite en a et $f\le g$ sur un intervalle pointé de centre a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le\lim\limits_{x\to a} g(x)$

14)si on a : $g(x)\le f(x)\le h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=l$

15)si on a : $u(x)\le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} u(x)=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to a^+} v(x)=+\infty$

16)Si on a : $u(x)\le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} v(x)=-\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to a^+} u(x)=-\infty$

Les propriétés précédentes restent vraies si $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{a}$ à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Limites usuels :

1) Les fonctions : $x\mapsto k|x|$; $x\mapsto k\sqrt{|x|}$; $x\mapsto k|x|^n$ Tendent vers 0 quand x rend vers 0.

2)l'inverse des fonctions $x\mapsto k|x|$; $x\mapsto k\sqrt{|x|}$; $x\mapsto k|x|^n$ où k un réel strictement positif et $n\in\mathbb{N}^*$, tendent vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

3) les fonctions $x\mapsto\dfrac{k}{|x|}$; $x\mapsto\dfrac{k}{\sqrt{|x|}}$; $x\mapsto\dfrac{k}{|x|^n}$

où k un réel donné et $n\in\mathbb{N}^*$

Tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4) Les fonctions : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Opérations sur les limites

- **Limite d'une somme**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

- **Limite de l'inverse d'une fonction**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

- **Limite d'un produit**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\times g(x))$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.
		signe $\pm$ donné par la règle des signes		

- **Limite d'un quotient**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)/g(x))$	l/l'	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	F.I.
			signe $\pm$ donné par la règle des signes			

F.I. signifie forme indéterminée ; il y en a quatre types :

$+\infty-\infty$;	$\pm\infty\times 0$;	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$;	$\dfrac{0}{0}$

Quelques techniques usuelles pour lever l'indéterminations :

Mise en facteur du terme prépondérant ou Utilisation d'une quantité conjuguée ou utilisation d'un taux d'accroissement…

Remarques :1) La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ $(-\infty)$ est la limite de son plus grand terme

2) La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ $(-\infty)$ est la limite du rapport des termes de plus grand degré

Limites des fonctions usuelles : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :1) $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ 2) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ 3)si $a \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a$ 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}=1$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{ax}=1$ 7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan ax}{ax}=1$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$ 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ *3)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$ *4)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}=0$ *5)* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x=0$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}=1$ *7)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

Etude d'asymptotes et de branches infinies.

L´étude des branches infinies a pour objectif de comprendre en d´détails le comportement de la courbe de la fonction

La première chose à faire est de calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction :

- **Si** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ alors la courbe (C) admet une asymptote verticale d´équation $x=a$
- **Si** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ alors la courbe admet une asymptote horizontale d´équation $y=b$
- **Si** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ en en va étudier **les branches infinies**

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0}$ → la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction d'axe (Ox). au voisinage de ∞

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a}$

- $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-(ax))=\infty}$ → la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction de la droite y=ax au voisinage de ∞
- $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-(ax))=b}$ → la courbe de f admet une asymptote d´équation y=ax+b au voisinage de ∞

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\infty}$ → la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction d'axe (Oy). au voisinage de ∞